Prof. Amed

2° Parcial AII

Fecha: 16 - 07 - 2022

Apellido y Nombre:...

Tiempo asignado: 2 hs

Teórico 1: Enunciado y demostración del Teorema de la **Independencia del camino en una integral de línea de un campo de gradientes**.

Teórico 2 : Enunciado y demostración de la **Condición necesaria para la existencia de función potencial**.

Prácticos: Hacer el gráfico correspondiente en cada ejercicio práctico.

1) Por medio de una conveniente aplicación del Teorema de la Divergencia, expresar el flujo del campo $\overline{f}(x,y,z)=\left(2x\ ,-2y\ ,z+xz^2\right)$ a través de la superficie S: $x^2+y^2+z^2 = 12z$ $\quad con\ z\geq 0\ ,\ \frac{1}{2}z^2\geq x^2+y^2$

2a) Aplicando Stokes calcular la circulación de $\overline{f}$ a lo largo de la curva $C=S_1\cap S_2$

$S_1: x^2+y^2+z^2=12z \quad , \quad S_2:\ \frac{1}{2}z^2=x^2+y^2 \quad si\ el\ \text{rot}\overline{\text{f}}(x,y,z)=(x\ ,y\ ,-2z\ )$

2b) Expresar el flujo de $\overline{\text{f}}(x,y,z)=(-2y\ ,2x\ ,z)$ a través de la porción de superficie S : $x^2+y^2+z^2=12z$ con $z^2\leq x^2+y^2 \quad con\ z\geq 0$

---

3)Expresar el flujo de $\overline{\text{f}}(x,y,z)=(-3y\ ,3x\ ,z)$ a través de la superficie del primer octante de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$ $\quad$ con $x^2+y^2\geq 4y$

---

4)Expresar, en coordenadas cilíndricas la masa del cuerpo del primer octante formado por $x^2+y^2\geq 2y$, $x^2+y^2+z^2\leq 4$ si la densidad es proporcional a la distancia al eje z

---

AM 2	2° parcial Prof. Amed	1/4 16-7-22

(T1) Enunciado y demostración del teorema de la independencia del camino en una integral de línea de un campo de gradientes

U campo diferenciable con gradiente continuo en un conj abierto simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{R}^n$
$\bar{A}$ y $\bar{B}$ están unidos por una curva C regular a trozos

$$C: \bar{g}(t),\ t \in [a,b] \quad \text{con } \bar{g}(a) = \bar{A}, \quad \bar{g}(b) = \bar{B}$$

$$\Rightarrow \int_C \bar{\nabla} U \, d\bar{g} = U(\bar{B}) - U(\bar{A})$$

Dem:

$$\int_C \bar{\nabla} U \, d\bar{g} = \int_a^b \bar{\nabla} U \bar{g}(t)\, \bar{g}'(t)\, dt$$

$$h(t) = U(\bar{g}(t)) \Rightarrow h'(t) = \bar{\nabla} U(\bar{g}(t))\, \bar{g}'(t)$$

h' continua en $[a,b]$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C \bar{\nabla} U \, d\bar{g}} = \int_a^b \bar{\nabla} U(\bar{g}(t))(\bar{g}'(t))\, dt = \int_a^b h'(t)\, dt =$$

$$= h(t)\Big|_a^b = h(b) - h(a) = U(\bar{g}(a)) - U\bar{g}(b) =$$

$$= \boxed{U(\bar{B}) - U(\bar{A})}$$

(12) Enunciado y demostración de la condición necesaria para la existencia de función potencial.

$\bar{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ \bar{F}(x,y) = (P_{(x,y)}, Q_{(x,y)})$

$\bar{F}$ campo vectorial derivable con continuidad en un recinto simplemente conexo

si $\bar{F}$ admite función potencial $\Rightarrow P'_y = Q'_x$

Dem:

x hip: $\exists\, U_{(x,y)} \ / \ \bar{\nabla} U = \bar{F}$

por lo que $\quad U'_x = P \ \wedge \ U'_y = Q$

$\therefore \quad P'_y = U''_{xy} \ \wedge \ Q'_x = U''_{yx}$

por hip. $P'_y \wedge Q'_x$ son continuas $\Rightarrow$ también lo son $U''_{xy} \wedge U''_{yx}$

x Teorema de Schwarz $\Rightarrow U''_{xy} = U''_{yx}$

$\Rightarrow P'_y = Q'_x$

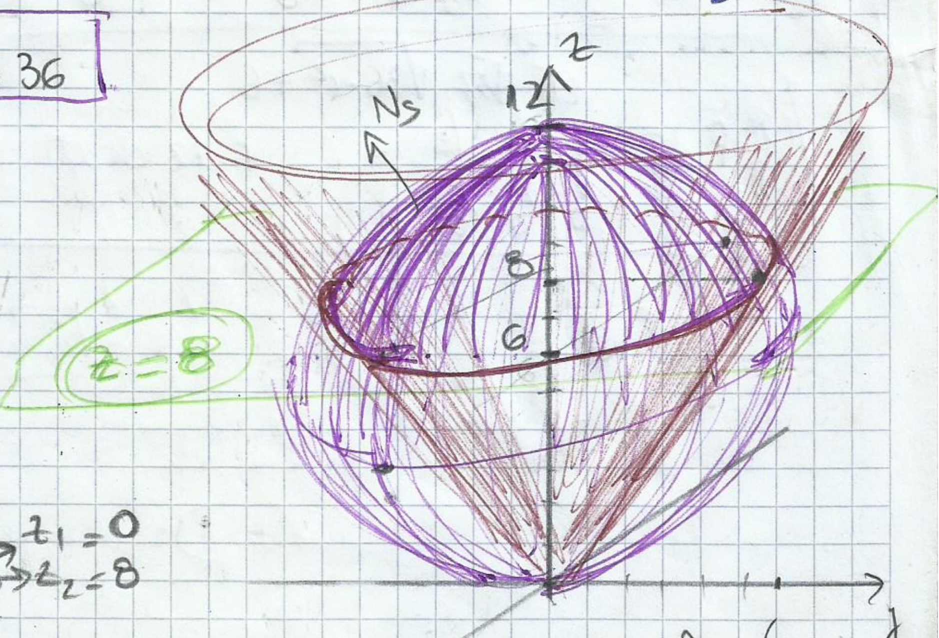
AM2	2° parcial	2/4
	Prof Amed	16-7-22

P1 Por medio de una conveniente aplicación del t. de la divergencia expresar el flujo del campo:

$$\bar{F}(x,y,z) = (2x, -2y, z + xz^2)$$

a través de la sup. $S: x^2+y^2+z^2 = 12z$ con $z \geq 0$, $\frac{1}{2}z^2 \geq x^2+y^2$

$$S: \begin{cases} \boxed{x^2+y^2+(z-6)^2 = 36} \\ \boxed{z^2 \geq 2(x^2+y^2)} \end{cases}$$

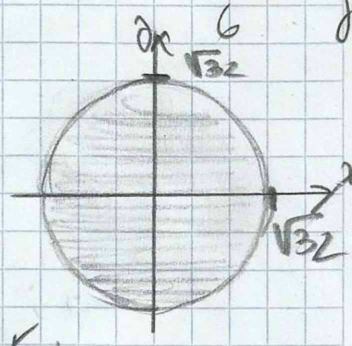


Intersección

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-6)^2 = 36 \\ \frac{z^2}{2} = (x^2+y^2) \end{cases}$$

$$\frac{z^2}{2} + z^2 - 12z = 0 \quad \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_2 = 8 \end{array}$$

$$\frac{8^2}{2} = 32 = x^2+y^2$$



T: disco en $z=8$

$N_T = (0,0,-1)$

$0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$x = r\cos(t)$, $y = r\,\text{sen}(t)$, $z = z$

SUT sup cerrada, orientada hacia afuera, $\bar{F} \in C^1$.

$$\oiint_{SUT} \bar{F}\,d\bar{\sigma} = \iint_S \bar{F}\,d\bar{\sigma} + \iint_T \bar{F}\,d\bar{\sigma} \underset{div}{=} \iiint_W div(\bar{F})\,dvol$$

SUT frontera de W

$$\oiint_{SUT} \bar{F}\,d\bar{\sigma} = \iiint_W 2-2+1+2xz\,dxdydz = \iiint_W dvol + \underbrace{\iiint_W 2xz\,dvol}_{0 \text{ (x simetría)}} =$$

$$\overset{c.v.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{32}}\int_8^{\sqrt{36-r^2}+6} \underset{Jac}{r}\,dz\,dr\,dt = \oiint_{SUT} \bar{F}\,d\bar{\sigma}$$

en z=8

$$\iint_T \bar{F}\,d\bar{\sigma} = \iint_{Txy} (2x, -2y, z+xz^2)\,(0,0,-1)\,dxdy = \iint_{Txy} -z - xz^2\,dxdy =$$

$$= \iint_{Txy} -8 - x\,64\,dxdy = -8\iint_{Txy} dxdy - 64\underbrace{\iint_{Txy} x\,dxdy}_{0} =$$

$$= -8\iint_{T_{xy}} dx\,dy = -8 \cdot \pi \cdot \sqrt{32}^{\,2} = 256\pi$$

$$\boxed{\iint_T \bar{F}\,d\bar{s} = 256\pi}$$

$$\oiint_{S \cup T} \bar{F}\,d\bar{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{32}} \int_8^{\sqrt{36-r^2}+6} r \; dz\,dr\,dt$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\,d\bar{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{32}} \int_8^{\sqrt{36-r^2}+6} r\,dz\,dr\,dt \; - 256\pi}$$

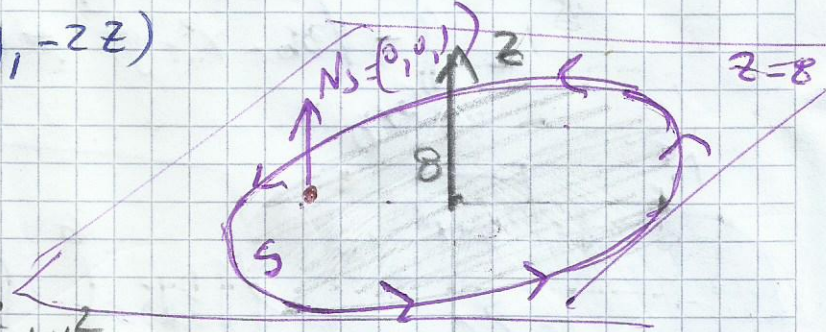
AM2	2° parcial	3/4
	Prof Ancel	16-7-22

(P2) a) Aplicando Stokes calcular la circ. de $\bar{F}$ a lo largo de la curva $C = S_1 \cap S_2$: $S_1: x^2+y^2+z^2 = 12z$

$S_2: \frac{1}{2}z^2 = x^2+y^2$

si el rot. $(F)(x,y,z) = (x, y, -2z)$

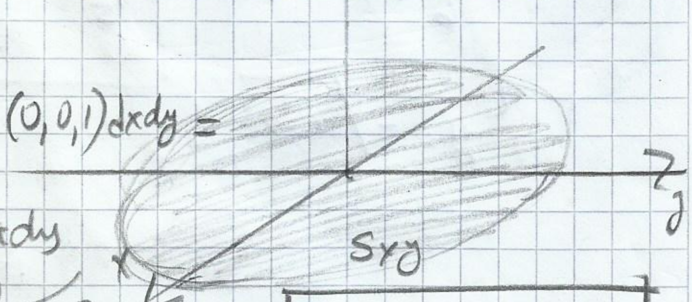
$$C: \begin{cases} x^2+y^2+(z-6)^2 = 36 \\ z^2 = 2(x^2+y^2) \end{cases}$$



Visto en (P1) $\rightarrow \begin{cases} z = 8 \\ 32 = x^2+y^2 \end{cases}$

Stokes

$$\oint_C \bar{F}\,d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(F)\,d\bar{S} = \iint_{S_{xy}} (x,y,-2z)\,(0,0,1)\,dx\,dy =$$



$$= \iint_{S_{xy}} 2z\,dx\,dy = 16 \iint_{S_{xy}} dx\,dy$$

en $z=8$

$\pi \cdot \sqrt{32}^2$

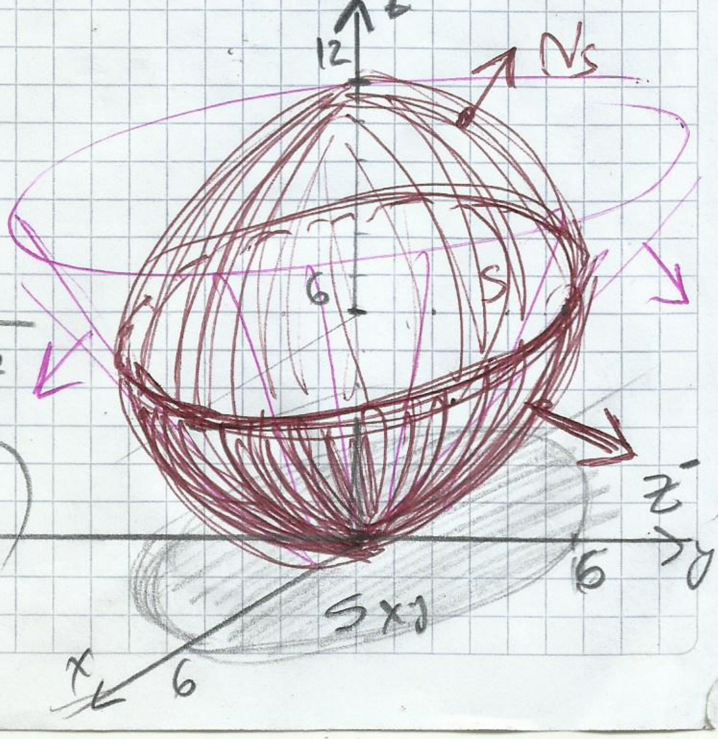
$$\boxed{\oint_C \bar{F}\,d\bar{l} = 512\pi}$$

b) Expresar el flujo de $\bar{F}(x,y,z) = (-2y, 2x, z)$ a través de la sup $S: x^2+y^2+z^2 = 12z$ con $z^2 \leq x^2+y^2$ con $z \geq 0$

• Hallo la intersección para analizar la proyección

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 12z \\ x^2+y^2 = z^2 \end{cases} \rightarrow 2z^2 = 12z$$

$z=0 \lor z=6$



$\rightarrow x^2+y^2+(z-6)^2 = 36$

$(z-6)^2 = 36 - x^2 - y^2$

$z-6 = \sqrt{36-x^2-y^2}$

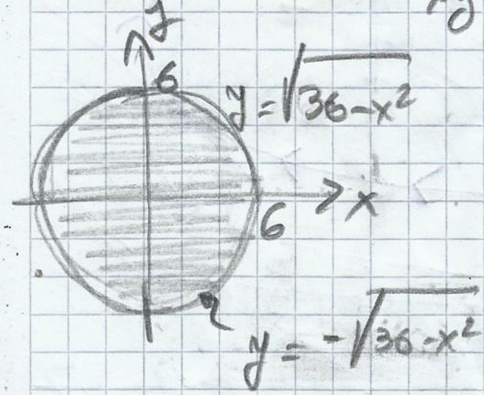
$$N = \left(\frac{2x}{2(z-6)}, \frac{2y}{2(z-6)}, \frac{2(z-6)}{2(z-6)}\right)$$

$$N = \left(\frac{-x}{z-6}, \frac{-y}{z-6}, 1\right)$$

$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \iint_{S_{xy}} \bar{F} \cdot N \, dxdy = \iint_{S_{xy}} (-2y, 2x, z)\left(\frac{-x}{z-6}, \frac{-y}{z-6}, -1\right) dxdy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} \cancel{\frac{+2yx}{z-6}} + \cancel{\frac{-2xy}{z-6}} - z \, dxdy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} -\sqrt{36-x^2-y^2} - 6 \, dxdy$$

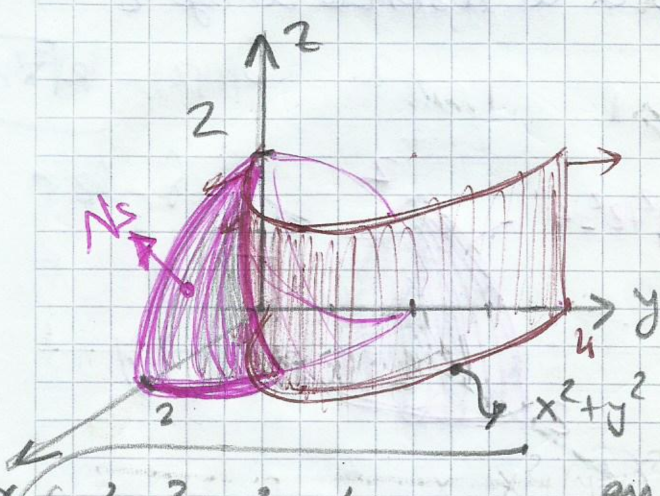


$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \int_{-6}^{6} \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{\sqrt{36-x^2}} -\sqrt{36-x^2-y^2} - 6 \, dxdy}$$

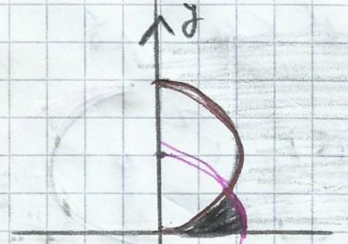
AM2	2° parcial	4/4
	Prof Arned	16-7-22

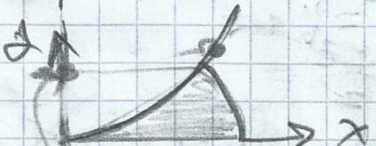
(P3) Expresar el flujo de $\bar{F}(x,y,z) = (-3y, 3x, z)$ a través de la sup del PRIMER OCTANTE de ec. $\boxed{x^2+y^2+z^2=4}$ con $x^2+y^2 \geq 4y$

$x^2+(y-2)^2 \geq 4$



$\to x^2+y^2=4y$





$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=4y \end{cases} \xrightarrow{\text{en } z=0} \begin{matrix} x^2+y^2=4 \\ 4y=4 \end{matrix} \to y=1$$

$0 \leq y \leq 1$

$\to x = \sqrt{4y-y^2}$

lo paso en $z=0$ $\to$ $x = \sqrt{4-y^2}$

$\sqrt{4y-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$

$$\boxed{z = \sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$x^2+y^2+z^2=4$

$$\to N = \left(\frac{2x}{2z}, \frac{2y}{2z}, \frac{2z}{2z}\right) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$

$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{S_{xy}} \bar{F} \cdot N \, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (-3y, 3x, z)\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} \cancel{\frac{-3yx}{z}} + \cancel{\frac{3xy}{z}} + z \, dx\,dy \qquad z = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \int_0^1 \int_{\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dx\,dy}$$

P4) Expresar, en coord. cilíndricas, la masa del cuerpo del PRIMER OCTANTE formado por $x^2+y^2 \geq 2y$

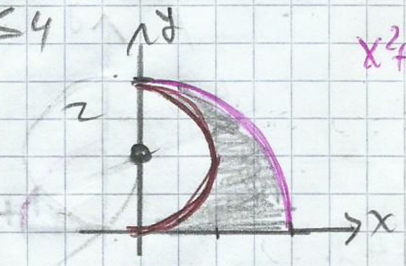
$x^2+y^2+z^2 \leq 4$

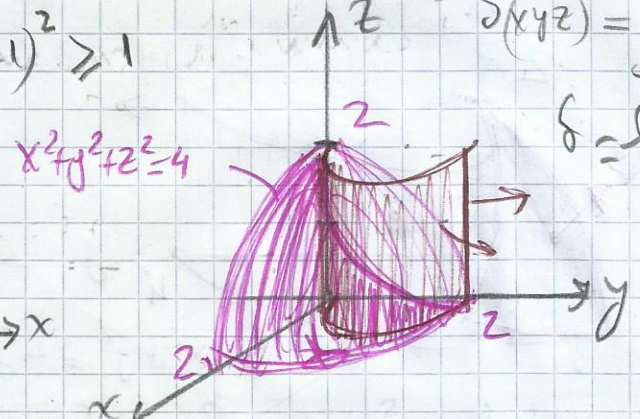
si la densidad es proporcional a la distancia al eje z

$\delta(x y z) = k\sqrt{x^2+y^2}$

$\delta = k r$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 2y \Rightarrow x^2+(y-1)^2 \geq 1 \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \end{cases}$$





$$W \begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$

$$\boxed{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}}$$

r : $) \leq r \leq)$

$x^2+y^2=2y$

$r^2 = 2r\,\mathrm{sen}(t)$

$x^2+y^2=4$

$r^2 \leq 4$

$$\boxed{2\,\mathrm{sen}(t) \leq r \leq 2}$$

$0 \leq z \leq$ esfera

$0 \leq z \leq \sqrt{4-(x^2+y^2)}$

$$\boxed{0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}}$$

$$\boxed{\text{Masa} = \iiint_W \delta(xyz)\,dx\,dy\,dz \overset{c.v.}{=} k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\,\mathrm{sen}(t)}^{2} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \underset{\text{Jac}}{r} \cdot \underset{\text{densidad}}{r}\; dz\,dr\,dt}$$